گذارهای فاز کوانتومی در مدل پاتس در حضور میدان مغناطیسی با بکار بردن گروه باز بهنجارش

قادر نجارباشی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

سمیرا اسفندیار پور بروجنی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

اکرم اقبالی بروجنی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

akram_eghbali@yahoo.com

چکیده

تجزیه و تحلیل میکروسکوپی گذار فاز می‌تواند فقط برای مدل های ساده‌ای مانند مدل آیزینگ بکار رود. مدل پاتس هامیلتونین مشابهی با مدل آیزینگ دارد با این تفاوت که اسپین آن می‌تواند (2s+1) مقدار ممکن برای اعداد صحیح دلخواه یا مقادیر نیمه صحیح s و s-1 و s-2 و ...و s– بگیردو متعلق بهکلاس جهانی مشابه با مدل آیزینگ می‌باشد. در این مقاله ما با استفاده از روش گروه باز بهنجارش بکار برده شده توسط گیترمن برای مدل پاتس شبکه‌ی مربعیگذار فاز را بررسی می‌کنیم که لازمه‌ی آن به دست آوردن نقاط ثابت می‌باشد.نتایج نشان می‌دهد برخی از نقاط به دست آمده ما را به نقطه‌ی بحرانی با خطای4درصد نزدیک می‌کند.

کلید واژه ها: گذار فازمدل پاتسباز بهنجارش

مقدمه: مدل پاتس برای شبکه‌ی مربعی

گذار فاز پارامغناطیس به فرومغناطیس در جامدات نمونه شاخص کلیه گذارهای مرتبه دوم است. برای توجیه این گذار فاز مدلهای مختلفی در مکانیک آماری معرفی شده است که در این پایان نامه برخی از آنها مطالعه شده اند. پس از مرور مختصر مفاهیم مکانیک آماری و پدیده های بحرانی مدل آیزینگ شرح داده می شود که یکی از مدلهای اصلی موجود در پدیده های بحرانی است. سپس یک مدل اسپینی مختلط معرفی می شود و با استفاده از روش ماتریس انتقال نشان داده می شود که این مدل در یک بعد دارای گذار فاز مرتبه اول است. در ادامه مدل پاتس به عنوان تعمیم مدل آیزینگ معرفی می شود و کمیت های فیزیکی همانند انرژی آزاد انرژی داخلی و گرمای ویژه به ازای مقادیر مختلف اسپین در شبکه های دو بعدی محاسبه می شوند. انرژی داخلی این شبکه ها نیز در

حالت عمومی در نقطه گذار محاسبه می شود. این مدل ها در حضور میدان بررسی می شوند و تابع پارش مدل پاتس روی شبکه نردبانی بطور دقیق محاسبه می شود. یک بسط سری نیز برای مدل آیزینگ دوبعدی در شبکه های متناهی ارائه می شود که تعدادی از جملات سری محاسبه شده اند.

مبانی نظری و پیشینه پژوهش

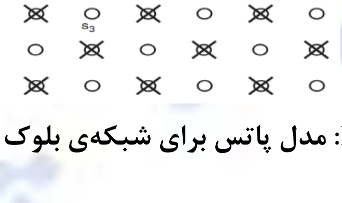
در چند دهه‌ی گذشته مدل های پاتس مورد توجه بسیاری از تحقیقات قرار گرفته است.این مدل ها اگر چه یک تعریف ساده‌ای دارندولی رفتار بحرانی غنی را ارائه می‌دهند[1]. در مدل پاتسنقطه‌ی $k_c = \frac{J}{k_B T_c} = \frac{2}{3}\log(\sqrt{3}+1)$ گذار فازمرتبه‌ی دوم را نشان می‌دهد[2] برای حالتی که یک شبکه‌ی مربعی در نظر می‌گیریمبرهمکنش بین یک اسپین و چهار نزدیک‌ترین همسایه‌اش در حضور میدان مغناطیسی خارجی هامیلتونینی به صورت زیر می‌دهد:

$$H = -J\sum_{(i,j)} s_i . s_j - h\sum_i s_i \tag{1}$$

در رابطه‌ی بالا h میدان مغناطیسی خارجی و J ضریب جفت‌شدگی است.حال تابع پارش را برای این هامیلتونین به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Z &= \exp[k(s_1+s_2+s_3+s_4)+k_0(s_1+s_2+s_3+s_4+1)]+\exp[k(s_1+s_2+s_3+s_4)+k_0(s_1+s_2+s_3+s_4-1)] \\ &+\exp[k_0(s_1+s_2+s_3+s_4+0)] = F\sum\exp[k\frac{1}{2}[s_1s_2+s_2s_3+s_3s_4+s_4s_1)+k_2(s_1s_3+s_2s_4)+k_3(s_1s_2s_3+s_2s_3s_4 \\ &+s_3s_4s_1+s_4s_1s_2)+k_4(s_1s_2s_3s_4)+k_5(s_1+s_2+s_3+s_4) \end{aligned} \tag{2}$$

سمت چپ تساوی بالا از رابطه‌ی $z = \sum\exp(-\beta H)$ حاصل می‌شود و درسمت راست از روش بازبهنجارش گیترمن که برای مدل آیزینگ بکار برده استفاده می‌کنیم[3]. در روابط بالا $k_0 = Bh$, $k = BJ$ است.دلیل استفاده از $\frac{k_1}{2}$ به جای k_1 این است که ضرب اسپین ها مانند $s_1 \cdot s_2$ در بعضی از جملات تابع پارش برای شبکه‌ی بلوک دوبارظاهر می‌شود.



شکل1: مدل پاتس برای شبکه‌ی بلوک مربعی

همان طور که در شکل نشان داده‌ایم اسپین s_0 در مکان $(0,0)$ قرارداده شده که با اسپین های s_1,s_2,s_3,s_4 برهمکنش می کند. حال جملات تابع پارش را به ازای $s_0 = 1, s_0 = -1, s_0 = 0$ می‌نویسیم وسپس 81 مقدار ممکن

(s_1,s_2,s_3,s_4)را در نظر می‌گیریم که هر گذار می‌تواند مقادیر 0و1± به خود بگیرد. همان طور که خواهیم دید81 آرایش ممکن به 17 گروهتقسیم می‌شوند که17معادله ی متفاوت بدست می آید. به منظور مشخص کردن6 پارامتر F,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 , با ساده کردن دو طرف این معادله برای 4مقدارمجزای (s_1,s_2,s_3,s_4) و گرفتن لگاریتم از دو طرف آن‌ها به 17معادله می‌رسیم.از این مجموعه17معادله‌ی خطی برای6 مجهول جواب یکتای زیررا می دهد.

$$\ln F = \ln(2\cosh k_0 + 1) \quad (3)$$

$$k_1 = 2k_2 \quad (4)$$

$$k_5 = k_0 + \frac{1}{4}\ln[2\cosh(2k + k_0) + 1] - \frac{1}{4}\ln[2\cosh(2k - k_0)] \quad (5)$$

$$k_3 = -\ln[2\cosh(3k + k_0) + 1] + \ln[2\cosh(3k - k_0)] + 2\ln F + 6K_2 \quad (6)$$

$$k_4 = \frac{1}{2}\ln[2\cosh(4k + k_0) + 1] + \frac{1}{2}\ln[2\cosh(4k - k_0)] - \ln F - 6K_2 \quad (7)$$

$$k' = k_5 = k_0 + \frac{1}{4}\ln[2\cosh(2k + k_0) + 1] - \frac{1}{4}\ln[2\cosh(2k - k_0)] \quad (8)$$

برای مدل پاتس برهمکنش‌های نتیجه شده در یک شبکه‌ی بلوک پیچیده‌تر از برهمکنش‌های شبکه‌ی اصلی است پس آن‌ها برای تحلیل گروه بازبهنجارش دقیق مناسب نیستند[4]. در ادامه برای ساده سازی مدل برخی تقریب هاییرا در نظر می‌گیریم.همچنین فرض می‌کنیم که:

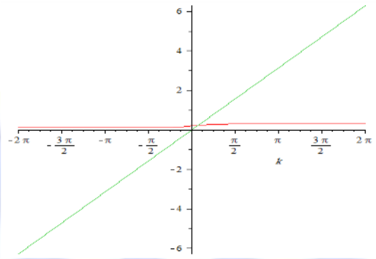
$$k' = k_5 = k_C \quad (9)$$

در نتیجه به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

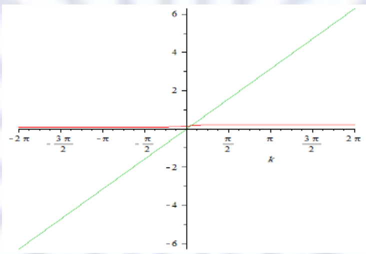
$$k' = k_5 = k_0 + \frac{1}{4}\ln[2\cosh(2k + k_0) + 1] - \frac{1}{4}\ln[2\cosh(2k - k_0)] \quad (10)$$

تحلیل داده هاو یافته ها

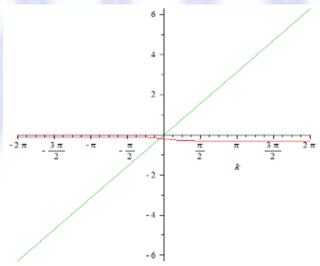
حال برای یافتن نقاط بحرانی بایستی به نقاط ثابت توجه کنیم بدین منظور سعی می‌کنیم به ازای چند مقداربرای میدان مغناطیسی خارجی نقاط ثابت راپیدا کنیم.کافی است برای بدست‌آوردن نقاطثابت $y_1 = k$ را با معادله‌ی $y_2 = k'(k_0,k)$ قطع دهیم[4,5].در شکل‌های زیر این بررسی به صورت نمودار نشان داده شده است.نتایجنشان می‌دهد که تقریب انجام گرفتهبرای مقادیرمثبت ومنفی میدان مغناطیسی خارجی $k_0 = -0.2, k_0 = 0.2, k_0 = 0.15$ نقاط ثابتی را نشان می‌دهدکه بررسی نشان می‌دهد که مقادیر مثبت k_0 با نقطه‌ی گذاری است که مزاردو بدست آورده است. در این روشی که ما بکار بردیم مقادیر $k_c = 0.188, k_c = 0.122$ بدست آمدکه 4درصد خطا با مزاردوداردو این نتیجه بدین معنا است که این نقاط مرتبط با نقطه‌ی گذارمزاردومی‌باشدولی به ازایمقادیر منفی k_0 وسایر تساوی های 7و8و9و10نقاط بدست آمده غیر مرتبط بانقطه‌ی گذار مزاردو می‌باشد[2].



نمودار1: **نقطه‌ی ثابت برای میدان مغناطیسی خارجی**($k_0=(0\cdot2)$ ، $k_c=0.188$)



نمودار2: **نقطه‌ی ثابت برای میدان مغناطیسی خارجی** ($k_0=(0\cdot15)$ ، $k_c=0.122$)



نمودار3: **نقطه‌ی ثابت برای میدان مغناطیسی خارجی**($k_0=(-0\cdot2)$ ، $k_c=0.122$)

نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش گروه باز بهنجارش برای مدل پاتس دو بعدی درحضور میدان مغناطیسی خارجی برای شبکه‌ی مربعی گذار فاز را بررسی کردیم.

همان‌طور که دیدیم گذار فاز برای مقادیر مثبت ومنفی میدان مغناطیسی دریک نقطه اتفاق می‌افتد.برای مقادیر $k_0=-0.2, k_0=0.2, k_0=0.15$ به ترتیب

$k_c = -0.222, k_c = 0.188, k_c = 0.122$

بدست می‌آید.از بین این مقادیر بدست آمده $k_c = 0.188, k_c = 0.122$ مرتبط با مقـدار $k_c = 0.145$ مزاردومـی‌باشـند و $k_c = -0.222$ ومقادیر منفی دیگر که ما را از نقطه‌ی گذار دور می‌کنـدغیر مـرتبط بـا مقـدارمزاردو مـی‌باشـد.بنابراین نتیجه می‌گیریم تقریبی که اینجا بکار بردیم تقریب خوبی است زیرا 4درصد خطابا مقدار واقعی دارد.

مراجع

- Wisconsin Department of Natural Resources. (2001). *Glacial Habitat Restoration areas*. Retrieved from http://www.dnr.state.wi.us/org/land/wildlife/hunt/hra.htm
- Christian Borgs , a.W.J., An explicit formula for the interface tension of the 2D Potts model. J.*Phys. I France 2*, 1992. **68**.
- fild, N.G., lecture on phase transisitions and the renormalization group. 1992: p. 229-273.
- G.mussardo, An introduction to Exactly solved models in statistical physics. 2010: p. 1-778.

Gitterrnan, M., *PHASE TRANSITIONS A Brief Account with Modern Applications*2004: p. 1-145.

Halpern, M.G.H., *PHASETRAMSITIOMSA Brief Account withModern Applications* 2004 p. 1-145.