منیفلدهای فازی C^1

پریسا همتیان دهکردی
عضو هیأت علمی دانشگاه پیام نور
Parisa.Hemmatian@yahoo.com

چکیده:

M.Ferraro و David H.Foster در [2] چند قضیه در مورد منیفلدهای فازی C^1 اثبات کرده اند. ما در این مقاله سعی کرده ایم به اثبات چند قضیه جدید در این زمینه بپردازیم.

مقدمه

تعاریف و نکاتی برای مجموعه های فازی توسط پروفسور زاده در [3] ارائه شد و مفاهیم برای نقاط فازی و همسایگی ها توسط Pu و Liu در [4] ارائه شد. یک منیفلد دیفرانسیل پذیر یک مجموعه است که موضعاً شبیه فضای اقلیدسی به نظر می رسد. برای آن تعاریف مختلفی در هندسه دیفرانسیل موضعی، هندسه تصویری، هندسه جبری [1] آمده است.

ابتدا تعاریف مقدماتی که پیش نیاز منیفلدهای فازی C^1 می باشند، وسپس چند قضیه در این زمینه که در [2] آمده، مطرح می کنیم و چند قضیه دیگر را خودمان اثبات می کنیم.

تعاریف

تعریف۱.۱ یک توپولوژی فازی روی یک مجموعه X یک خانواده τ از مجموعه های فازی در X است؛ به طوریکه شرایط زیر برقرار باشد:

i) $k_0, k_1 \in \tau$.

ii) اگر $A, B \in \tau$ آنگاه $A \cap B \in \tau$.

iii) اگر $A_i \in \tau$ برای هر $j \in J$ (J مجموعه اندیس است)، آنگاه $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau$.

تعریف۱.۲ یک فضای توپولوژی فازی یک فضای T_1 نامیده می شود؛ اگر هر نقطه فازی یک مجموعه فازی بسته باشد.

تعریف۱.۳ گیریم $\{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ یک خانواده از fts ها باشد و (X,τ) حاصلضرب fts ها است [5, 6]؛ حاصلضرب توپولوژی فازی τ روی X یک پایه از مجموعه اشتراکهای باپایان

مجموعه های فازی به فرم $p_j^{-1}(A_j)$ می باشد که $p_j^{-1}(A_j)$ تصویر معکوس $A_j \in \tau_j$ تحت تصویر p_j از X به X_j است.

فرض کنیم $\{X_j\}_{1\le j\le n}$ یک خانواده باپایان از مجموعه ها و برای هر j ، A_j یک مجموعه فازی در X_j است. حاصلضرب $A=\prod_{j=1}^{n} X_j$ از خانواده $\{A_j\}$ ها تعریف شده که مجموعه فازی در $X=\prod_{j=1}^{n} X_j$ می باشد و تابع عضویتی به فرم زیر دارد.

$$\mu_A(x)=\min\{\mu_{A_j}(p_j(x))\},\quad x\in X.$$

تعریف۱.۴ فرض کنیم $(X,\tau),(Y,\upsilon)$ دو مجموعه توپولوژی فازی(به اختصارfts) باشند، یک نگاشت از یک (X,τ) به توی (Y,υ) پیوسته فازی نامیده می شود؛ اگر برای هر مجموعه فازی باز V در υ تصویر معکوس $f^{-1}(V)$ در τ باز باشد. برعکس f باز فازی نامیده می شود، اگر برای هرمجموعه فازی باز U در τ، تصویر $f(U)$در υ باز باشد.

تعریف۱.۵ یک نگاشت دوسویی fاز یک fts (X,τ) به توی یک fts (Y,υ) یک همیومرفیسم فازی نامیده می شود؛ اگر پیوسته فازی و باز فازی باشد.

تعریف۱.۶ یک فضای برداری توپولوژیکی (یا به اختصار ftvs) یک فضای برداری E روی میدان K از اعداد حقیقی یا مختلط است، که E یک توپولوژی فازی τ را و K طبق معمول توپوژی κ را به ارث می برند و دو نگاشت زیر پیوسته فازی باشند.

$$(K,\kappa)\times(E,\tau)\to(E,\tau) \qquad (E,\tau)\times(E,\tau)\to(E,\tau)$$
$$(\alpha,x)\to\alpha x \qquad \text{و} \qquad (x,y)\to x+y$$

تعریف۱.۷ یک نگاشت φ مماس به صفر نامیده می شود؛ اگر یک همسایگی W از 0_δ، $0<\delta\le 1$، در F یک همسایگی V از 0_λ، برای هر λ، $0<\lambda<\delta$ در E باشد، به طوری که برای بعضی توابع $o(t)$، $\varphi(tV)\subset o(t)W$.

تعریف۱.۸ فرض کنیم E,F دو ftvs باشند، و هر کدام توپولوژی فازی T_1 را به ارث می برند. گیریم $f:E\to F$ یک نگاشت پیوسته فازی باشد. آنگاه fدر نقطه x مشتق پذیر فازی در $x\in E$نامیده می شود؛ اگریک نگاشت پیوسته فازی u از E به توی F وجود داشته باشد به طوریکه

$$f(x+y)=f(x)+u(y)+\varphi(y),\quad y\in E$$

که φمماس به صفر است. نگاشت u مشتق فازی f در نقطه $x\in E$ نامیده می شود، مشتق فازی f در نقطه x با نماد $f'(x)$ نامیده می شود که یک عضو L(E,F) است، L(E,F)

مجموعه نگاشتهای پیوسته فازی خطی از E به توی F است. نگاشت f مشتق پذیر فازی است؛ اگر در هر نقطه E مشتق پذیر فازی باشد.

تعریف ۱.۹ گیریم E,F فضاهای برداری توپولوژی فازی باشند. یک دوسویی f از E به F، دیفیمورفیسم فازی از کلاس C^1 نامیده می شود؛ اگر خودش و معکوسش مشتق پذیر فازی باشند و f' و $(f^{-1})'$ پیوسته فازی نامیده می شود.

تعریف ۱.۱۰ فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک اطلس فازی A از کلاس C^1 روی X مجموعه ای از زوجهای مرتب (A_j,φ_j) می باشد که در شرایط زیر برقرار است:

i) هر A_j یک مجموعه فازی در X است و $\sup_j\{\mu_{A_j}(x)\}=1$ برای هر $x\in X$.

ii) هر φ_j یک دوسویی است که روی محمل A_j، $\{x\in X:\mu_{A_j}(x)>0\}$ تعریف شده و نگاشتهای A_j به توی یک مجموعه باز فازی $\varphi_j(A_j)$ برای بعضی توابع ftvs E_j می باشد و برای هر l در مجموعه اندیس $\varphi_j(A_j\cap A_l)$ یک مجموعه فازی باز در E_j می باشد.

iii) نگاشت $\varphi_l o\varphi_j^{-1}$ که نگاشتی از $\varphi_j(A_j\cap A_l)$ به $\varphi_l(A_j\cap A_l)$ می باشد، یک دیفیمورفیسم فازی C^1 برای هر زوج از اندیسهای $j.l$ است.

هر زوج (A_j,φ_j) یک چارت فازی از اطلسهای فازی نامیده می شود. اگر یک نقطه $x\in X$ در محمل A_j قرار گیرد، آنگاه زوج (A_j,φ_j) یک چارت فازی در نقطه x است.

تعریف ۱.۱۱ فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژی فازی باشد و یک مجموعه فازی باز A در X و یک نگاشت دوسویی φ روی محمل A تعریف شده و نگاشت A به مجموعه فازی باز V در بعضی E ftvs باشد؛ آنگاه (A,φ) سازگار با اطلس C^1 $\{(A_j,\varphi_j)\}$ است؛ اگر هر نگاشت $\varphi_j o\varphi^{-1}$ از $\varphi(A\cap A_j)$ به $\varphi_j(A\cap A_j)$ یک دیفیمورفیسم فازی از کلاس C^1 باشد. دو اطلس فازی C^1 سازگارند؛ اگر هر چارت فازی از یک اطلس سازگار با هر چارت فازی از اطلس دیگر باشد. به سادگی بررسی می شود که سازگاری بین اطلسهای فازی C^1 یک رابطه هم ارزی است. یک کلاس هم ارزی از اطلسهای فازی X یک منیفلد فازی C^1 روی X نامیده می شود.

قضیه های اثبات شده توسط M.Ferraro و D.H.Foster

قضیه ۲.۱ فرض کنیم A یک اطلس فازی C^1 باشد، به طوریکه چارتهای (A_j,φ_j) روی مجموعه X_1 باشند و B یک اطلس فازی C^1 باشد، به طوریکه چارتهای (B_l,ψ_l) روی مجموعه X_2 باشند، آنگاه مجموعه زوجهای مرتب $(A_j\times B_l,\varphi_j\times\psi_l)$ به فرم یک اطلس فازی C^1 روی $X_1\times X_2$ می باشند.

قضیه۲.۲ فرض کنیم A یک اطلس فازی C^1 باشد، به طوریکه چارتهای (A_j,φ_j) و محمل A برای هر مجموعه فازی باز در ftvs های E_j، $(\varphi_j^{-1}(V),\varphi_j)$ یک چارت فازی از A می باشد. خانواده $\{A_j\}$ از مجموعه های فازی به فرم یک پایه برای توپولوژی فازی مناسب روی X است، و در این توپولوژی φ_jها پیوسته فازی هستند.

قضیه۲.۳ فرض کنیم X,Y منیفلدهای فازی باشند، آنگاه $X\times Y$ یک منیفلد فازی است.

قضیه۲.۴ فرض کنیم X,Y,Z منیفلدهای فازی باشند و f یک نگاشت از X به توی Y است و g یک نگاشت از Y به Z است. اگر g, f مشتق پذیر فازی باشند،آنگاه gof مشتق پذیر فازی است.

قضیه های اثبات شده توسط ما

در این بخش تلاش ما بر این است که قضایای زیر را اثبات کنیم.

قضیه ۳.۱ فرض کنیم M و N منیفلدهای فازی باشند، و $p: M\times N\to M$ نگاشت تصویری کانونی $p(a,b)=a$ و $i_b: M\to M\times N$ یک نگاشت شمول $i_b(a)=(a,b)$ باشد، آنگاه p یک نگاشت مشتق پذیرفازی است.

برهان : اطلسهای فازی $\{(A_j,\varphi_j)\}$ برای M و $\{(B_l,\psi_l)\}$ برای N را در نظر می گیریم. قبلاً نشان داده شد که $M\times N$ یک منیفلد فازی با اطلسهای $\{(A_j\times B_l,\varphi_j\times\psi_l)\}$ می باشد. فرض کنیم $(a,b)\in M$ باشد، هر چارت مختصاتی فازی (A_j,φ_j) در a و (B_l,ψ_l) در b را درنظر می گیریم؛ آنگاه $(a,b)\in A_j\times B_l$ و $p(A_j\times B_l)=A_j\subset A_j$ می باشد؛ بنابراین می توانیم

$x \in M, y \in N$ ،$\Omega = A_j \times B_l, f = \varphi_j \times \psi_l, A = A_j, B = B_l$ در نظر بگیریم. آنگاه نقطه (x,y) متعلق به $\varphi_j \times \psi_l (A_j \times B_l)$ است و

$$\varphi_j opo(\varphi_j \times \psi_l)^{-1}(x,y) = \varphi_j op(\varphi_j^{-1}(x), \psi_l^{-1}(y)) = \varphi_j(\varphi_j^{-1}(x)) = x$$

بنابراین $\varphi_j opo(\varphi_j \times \psi_l) : (x,y) \to x$ نگاشت تصویری کانونی است؛ هر مولفه از این تصویرمشتق پذیر فازی است؛ پس یک نگاشت مشتق پذیر فازی می باشد.

قضیه۲. ۳ فرض کنیم M و N منیفلدهای فازی باشند، و $p : M \times N \to M$ نگاشت تصویری کانونی $p\,(a,b)=a$ و $i_b : M \to M \times N$ یک نگاشت شمول $i_b(a) = (a,b)$ باشد، آنگاه i_b یک نگاشت مشتق پذیر فازی است.

برهان: چون $\{(B_l, \psi_l)\}$ یک اطلس فازی است. می توانیم چارت فازی (B,ψ) روی N را حولb درنظر بگیریم.

چون $a \in M$ و $\{(A_j, \varphi_j)\}$ یک اطلس فازی است، و $a \in A$ به ازای بعضی اطلسهای فازی (A,φ) در این خانواده است. $\Omega = A \times B, f = \varphi \times \psi$ را اختیار می کنیم. برای هر $x \in \varphi(A)$ داریم :

$$\varphi \times \psi o i_b(\varphi^{-1}(x)) = \varphi \times \psi(\varphi^{-1}(x), b) = (x, \psi(b))$$

بنابراین نگاشت $\varphi \times \psi o i_b o \varphi^{-1}$ نگاشتی است که $x \to (x,c), \psi(b) = c$ و مشتق پذیر فازی است؛ و به وضوح مشخص است که i_b یک نگاشت مشتق پذیر فازی است.

قضیه۳. ۳ یک نگاشت پیوسته فازی $F : M \to N$ بین منیفلدهای فازی مشتق پذیر، مشتق پذیرفازی است اگر برای هر تابع مشتق پذیرفازی f با دامنه $W_f \subset N$، foF با دامنه $F^{-1}(W_f) \subset M$ مشتق پذیر فازی باشد.

برهان : $\leftarrow$ فرض کنید F,f مشتق پذیر فازی باشند. چون f مشتق پذیر فازی است؛ پس چارت فازی (B,ψ) روی $W_f \subset N$ حول $F(m)$ است به طوریکه $F(A) \subset B$؛ و نگاشت $fo\psi^{-1}$ با دامنه $\psi(B)$ مشتق پذیر فازی است. چون F مشتق پذیر فازی است، یک چارت فازی (A,φ) روی $F^{-1}(W_f) \subset M$ حول m وجود دارد به طوریکه $F(A) \subset B$، و نگاشت $\psi oFo\varphi^{-1} = (fo\psi^{-1})o(\psi oFo\varphi)$ یک ترکیب از دو نگاشت مشتق پذیر فازی بین فضاهای فازی است؛ بنابراین foF مشتق پذیر فازی است.

$\rightarrow$اکنون فرض کنیم foF مشتق پذیر فازی باشد، هر چارت (B,ψ) حول $F(m)$ را در نظر بگیرید. $f=\psi, W_f=B$ را اختیار کنید. آنگاه f یک تابع مشتق پذیر فازی با سازگاری چارتهای فازی روی N است. طبق فرض ψoF مشتق پذیر فازی است. این بدان معناست که یک چارت فازی (A,φ) روی $F^{-1}(B)$ حول m وجود دارد به طوریکه $\psi oFo\varphi^{-1}$ با دامنه $\varphi(A)$ مشتق پذیر فازی است.

منابع

[1] P.J .Olver, Equivalence, Invariants, and Symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, (1995

Fuzzy manifolds, Fuzzy Sets and systems 54(1993) C^1 [2] M. Ferraro and D. H. Foster,
North-Holland.

[3] L. A. Zadeh, Fuzzy srts, Inform. And Control 8(1965) 338-353.

[4] P.M. Pu and Y. M. Liu, Fuzzy Topology, I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith Convergence, J. Math. Anal. Appl. 76(1980) 571-599.

[5] D. H. Foster, Fuzzy topological groups, J. Math. Anal. Appl. 67(1979) 549-564.

[6] C. K. Fuzzy topology: Product and quotient theorems, J. Math. Anal. Appl. 45(1974) 512-521.