یک قضیه نقطه ثابت برای نگاشتهای چند مقداره در فضاهای جزئاً مرتب

اکرم صفری هفشجانی

عضو هیأت علمی دانشگاه پیام نور
akram_safary@yahoo.com

چکیده:
قضیه انقباض باناخ یکی از قضایای مهم در آنالیز تابعی است. هدف ما در این مقاله بیان و اثبات وجود یک نقطه ثابت برای نگاشت های چند مقداره در فضاهای جزئاً مرتب که در حقیقت تعمیمی از قضیه انقباض باناخ می باشد، است.

واژگان کلیدی: نگاشت چند مقداره، فضای جزئاً مرتب، نقطه ثابت

مقدمه

فرض کنیم X یک فضای باناخ و $CB(X)$ مجموعه تمام زیر مجموعه های ناتهی، بسته و کراندارX باشد.
فرض کنید A و B اعضایی از $CB(X)$ باشند در این صورت تعریف می کنیم

$$D(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$$

همچنین

$$\delta(A,B) = \sup_{a\in A, b\in B} d(a,b)$$

می گوییم $A \prec_1 B$ هرگاه $a \in A$ و $b \in B$ موجود باشند به گونه ای که $a \leq b$.
اگر $T: X \to CB(X)$ یک نگاشت چند مقداره باشد $x_0 \in X$ را یک نقطه ثابت آن می گوییم هرگاه $x_0 \in Tx_0$.

نتایج اصلی

قضیه. اگر $(X,\leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب و متر d روی X به گونه ای باشد که (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. همچنین $T:X\to CB(X)$ یک نگاشت چند مقداره باشد به گونه ای که شرایط زیر برقرار باشند

الف) $x_0\in X$ موجود باشد به گونه ای که $\{x_0\}<_1 Tx_0$.

ب) برای هر $x,y\in X$ با شرط $x\leq y$ داشته باشیم: $Tx<_1 Ty$.

ج) اگر $x_{\mathrm{n}}\to \mathrm{x}$ دنباله ای غیر نزولی در X باشد، برای هر $n\in N$ داشته باشیم $x_{\mathrm{n}}\leq \mathrm{x}$.

د) برای هر $x\leq y$ داشته باشیم

$$\delta(\mathrm{Tx},\mathrm{Ty})\leq \frac{1}{2}\big(D(x,Ty)+D(y,Tx)\big)-\varphi\big(D(x,Ty),D(y,Tx)\big)\qquad(1)$$

که در آن نگاشت $\varphi:[0,\infty)^2\to[0,\infty)$ نگاشتی پیوسته است که دارای دو شرط زیر است

$$a\geq c,b\geq d\Rightarrow\varphi(a,b)\leq\varphi(c,d)$$
$$\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})=0\Leftrightarrow x=y=0$$

در این صورت نگاشت T دارای نقطه ثابت است.

اثبات. چون $\{x_0\}<_1 Tx_0$ بنابراین $x_1\in \mathrm{Tx}_0$ وجود دارد که $x_0\leq \mathrm{x}_1$ که شرط (ب) ایجاب می کند $Tx_0<_1 Tx_1$ در نتیجه $x_2\in Tx_1$ وجود دارد که $x_1\leq \mathrm{x}_2$ که باز هم شرط (ب) ایجاب می کند $Tx_1<_1 Tx_2$. با ادامه این روند دنباله $\{x_n\}$ بدست می آید به گونه ای که $x_{n+1}\in Tx_n$ و $x_0\leq x_1\leq x_2\leq 000$. از آنچه بدست آمد، اگر $n\in N$ موجود باشد که $x_n=x_{n+1}$ آنگاه $x_n\in Tx_n$ و در نتیجه حکم برقرار است؛ پس فرض کنیم برای هر $n\in N$ همواره $x_n\neq x_{n+1}$ باشد در این حالت داریم

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},x_n)&\leq\delta(x_{n+1},x_n)=\delta(Tx_n,Tx_{n-1})\\&\leq\frac{1}{2}\big(D(x_n,Tx_{n-1})+D(x_{n-1},Tx_n)\big)\\&\qquad-\varphi\big(D(x_n,Tx_{n-1}),D(x_{n-1},Tx_n)\big)\\&\leq\frac{1}{2}\big(d(x_n,x_n)+d(x_{n-1},x_{n+1})\big)\\&\qquad-\varphi\big(d(x_n,x_n),d(x_{n-1},x_{n+1})\big)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1}) - \varphi\big(0, d(x_{n-1}, x_{n+1})\big)$$

$$\le \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1}) \le \frac{1}{2}\big(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\big) \qquad (2)$$

بنابراین داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) \le d(x_n, x_{n-1})$$

در نتیجه دنباله$\{d(x_{n+1}, x_n)\}$ یک دنباله نزولی از اعداد حقیقی غیر منفی است و در نتیجه همگراست؛ فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_n) = \mathrm{r} \qquad (3)$$

در (۲) اگر n را به بی نهایت میل دهیم خواهیم داشت

$$r \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1}) \le \frac{1}{2}(r + r) = r$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_{n+1}) = 2r \qquad (4)$$

مجدداً اگر در (۲) n را به بی نهایت میل دهیم و از روابط (۳) و (۴) و پیوستگی φ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$r \le \frac{1}{2} 2r - \varphi(0,2r) \le r$$

که ایجاب می کند $\varphi(0,2r) = 0$ و در نتیجه $r = 0$ لذا داریم

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\mathrm{x}_{n+1}, \mathrm{x}_n) = 0 \qquad (5)$$

ثابت خواهیم کرد که دنباله $\{x_n\}$ کشی است زیرا در غیر این صورت $\varepsilon > 0$ و دنباله های $\{x_{m(k)}\}$ و $\{x_{n(k)}\}$ با $n(k) > m(k) > k$ وجود خواهند داشت به گونه ای که برای هر k خواهیم داشت

$$d\big(x_{n(k)}, x_{m(k)}\big) \ge \varepsilon \qquad (6)$$

بعلاوه متناظر با $m(k)$ می توان $n(k)$ را کوچکترین عددی انتخاب کرد که در شرایط $n(k) > m(k)$ و (۶) صادق باشد.

در این صورت

$$d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) < \varepsilon \qquad (7)$$

از روابط (۶) و (۷) داریم

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right)\\ &\le d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)})\\ &< d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right) + \varepsilon\end{aligned}$$

با میل دادن k به بی نهایت و استفاده از رابطه (۵) داریم

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) = \varepsilon \qquad (8)$$

مجدداً داریم

$$\begin{aligned}d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\right) &\le d\left(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\right) + d\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) + d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right)\\ &\le d\left(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}\right) + d\left(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}\right) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)} + d\left(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}\right)\end{aligned}$$

که با استفاده از روابط (۵) و (۸) بدست می آوریم

$$d\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) = \varepsilon \qquad (9)$$

چون $n(k) > m(k)$ مقادیر $x_{n(k)-1}$ و $x_{m(k)-1}$ قابل مقایسه هستند لذا از شرط (د) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) \le \delta\left(Tx_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}\right)\\ &\le \frac{1}{2}\left(D\left(x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}\right) + D\left(x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1}\right)\right) - \varphi\left(D\left(x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}\right), D\left(x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1}\right)\right)\\ &\le \frac{1}{2}\left(d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right) + d\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right)\right) - \varphi\left(d\left(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}\right), d\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right)\right)\end{aligned}$$

با میل دادن مجدد k به بی نهایت و استفاده از روابط (۸) و (۹) داریم

$$\varepsilon \le \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) - \varphi(\varepsilon, \varepsilon) \le \varepsilon$$

بنابراین $\varphi(\varepsilon, \varepsilon) = 0$ که ایجاب می کند $\varepsilon = 0$ که تناقض با فرضمان است. لذا دنباله $\{x_n\}$ کشی است پس $z \in X$ وجود دارد به گونه ای که $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ در نتیجه برای هر $n \in N$ داریم $x_n \le z$ و

$$\delta(x_{n+1}, Tz) \le \delta(Tx_n, Tz)$$

$$\leq \frac{1}{2}\big(D(x_n, Tz) + D(z, Tx_n)\big) - \varphi(D(x_n, Tz) + D(z, Tx_n))$$
$$\leq \frac{1}{2}\big(D(x_n, Tz) + D(z, x_{n+1})\big) - \varphi(D(x_n, Tz) + D(z, x_{n+1}))$$

با میل دادن n به بی نهایت نتیجه می گیریم

$$\delta(z, Tz) \leq \frac{1}{2} D(z, Tz) \leq D(z, Tz)$$

بنابراین $Tz = \{z\}$ و لذا حکم در حالت دوم هم برقرار است.

منابع

[1]J. Harjani, B. Lopez, K.Sadarangani, Fixed point theorems for weakly C-contractive mappings in ordered metric spaces, computers and mathematics with applications, 61, 790-796, (2011).
[2]Z. Liu, Coincidence Theorems for Contractive Type Multivalued Mappings, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 27, 111-116, (2004).